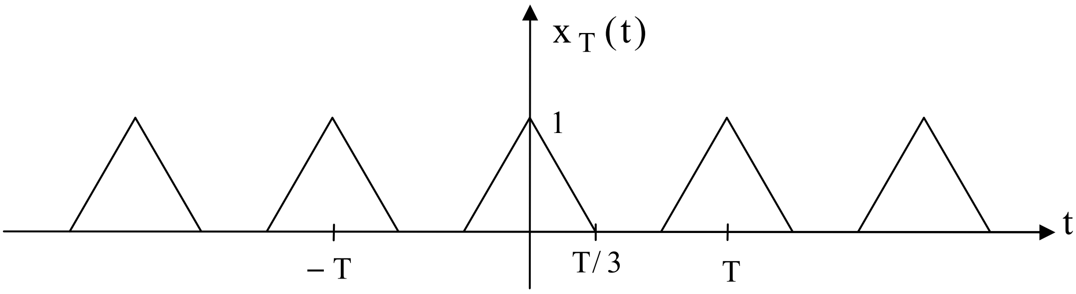
Le développement en série de Fourier d'un signal analogique périodique

1. Définitions

$x_T(t) =$ Signal analogique périodique, de période T



Si $x_T(t)$ est, sur une période, une fonction continue de carré sommable ($\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x_T^2(t)\,dt$ fini),

on a :

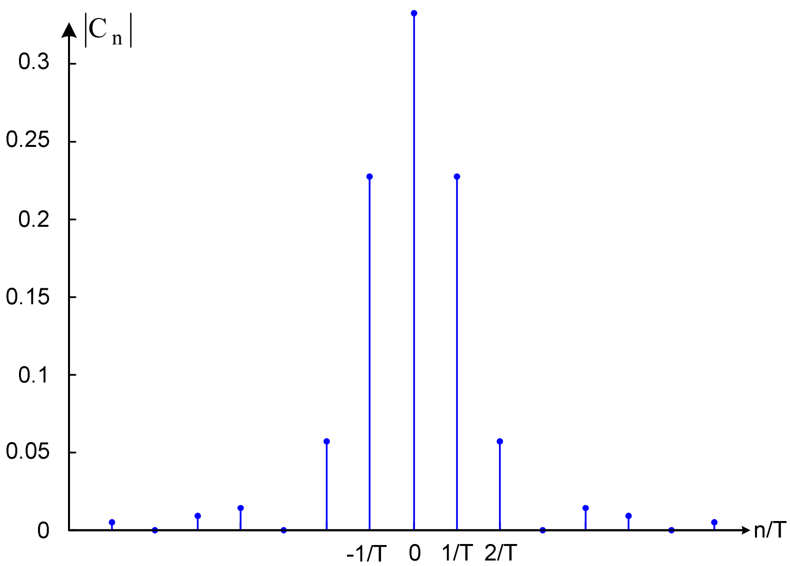
$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\, e^{jn\frac{2\pi}{T}t} \qquad \text{avec } C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x_T(t)\, e^{-jn\frac{2\pi}{T}t}\, dt$$

C_n = Coefficient de Fourier (Remarque : C_0 = valeur moyenne de $x_T(t)$)

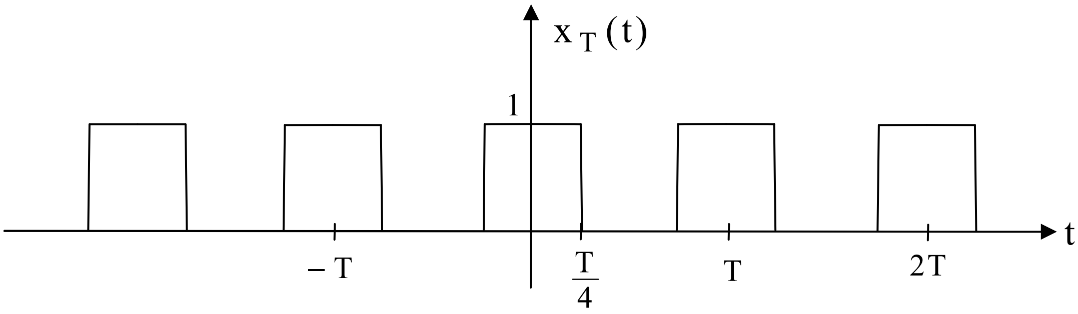
$x_T(t)$ est ainsi décomposé sur une base de fonctions orthogonales harmoniques :

$$e^{jn\frac{2\pi}{T}t} = \cos(n\frac{2\pi}{T}t) + j\sin(n\frac{2\pi}{T}t)$$

La suite $\{C_n\}$ constitue le spectre (discret) de $x_T(t)$.



2. Un spectre fondamental et le phénomène de Gibbs



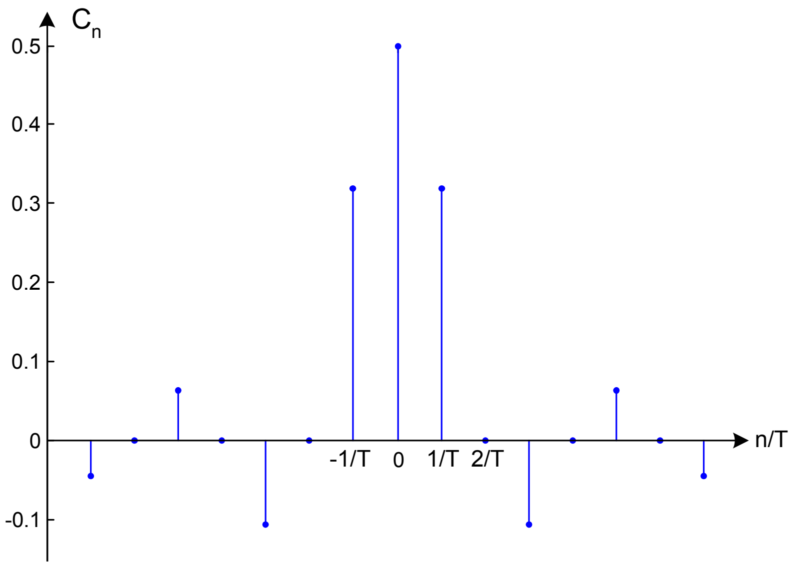
Les C_n sont réels car $x_T(t)$ est une fonction paire.

On peut les calculer : $C_0 = \frac{1}{2}$, $C_1 = \frac{2}{\pi}$, $C_2 = 0$, $C_3 = -\frac{2}{3\pi}$, $C_4 = 0$, …

Plus généralement : $C_n = \dfrac{2(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\pi}$, pour n impair

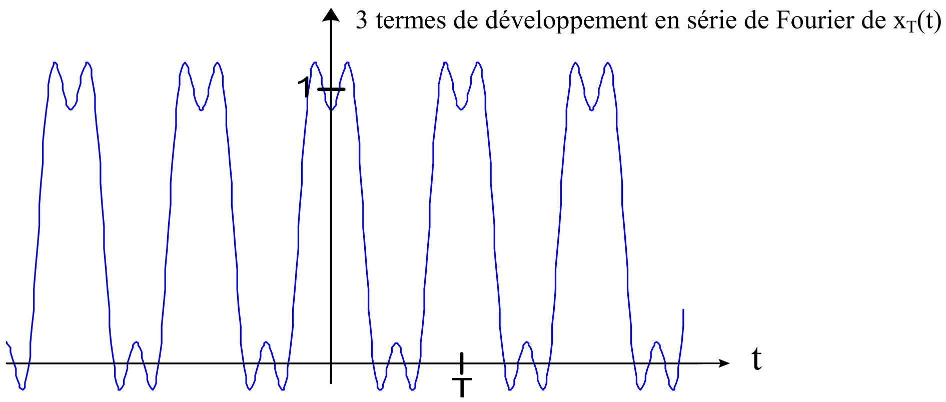
$C_n = 0$, pour n pair

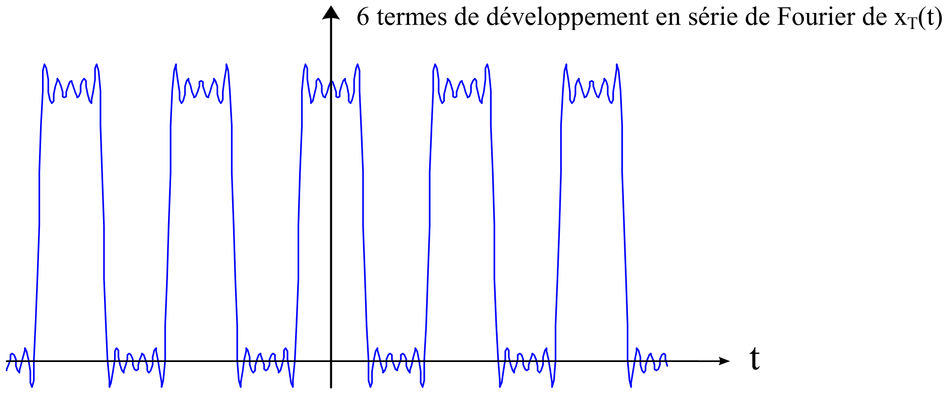
Ainsi : $$x_T(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{2(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\pi} \cos(n\frac{2\pi}{T})$$

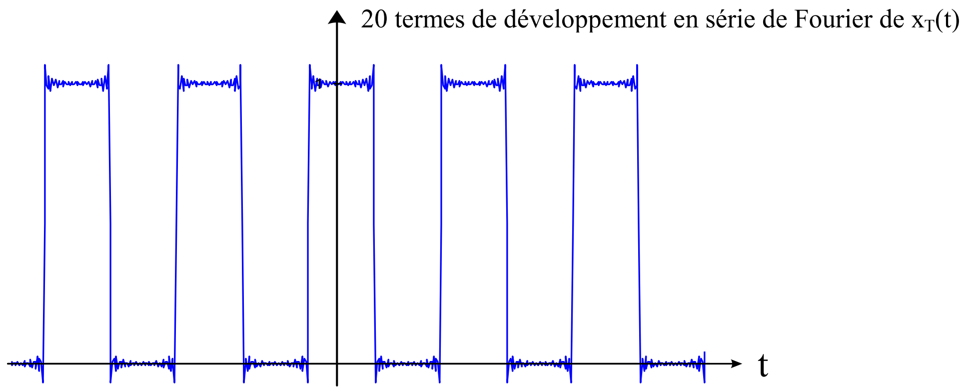


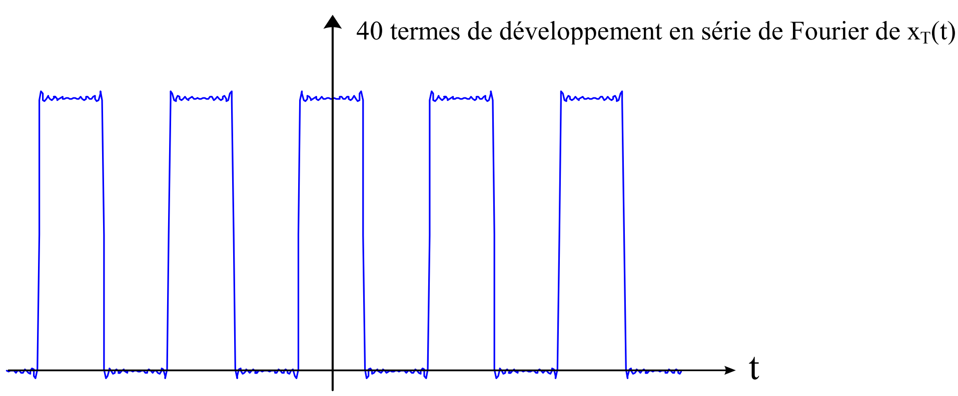
Décomposition du signal $x_T(t)$ en série de Fourier

On peut examiner la convergence de cette série en représentant le membre de droite en se limitant à 3 termes, 6 termes, 20 termes puis 40.
On constate que la convergence est lente car pour « réaliser » les montées rapides des créneaux il faut des sinusoïdes hautes fréquences.
D’autre part, on observe des oscillations qui constituent le phénomène de Gibbs.


3 termes de développement en série de Fourier de $x_T(t)$
1
T
t


6 termes de développement en série de Fourier de $x_T(t)$
t


20 termes de développement en série de Fourier de $x_T(t)$
t


40 termes de développement en série de Fourier de $x_T(t)$
t